4. Bulove funkcije

4.1 Definicija i načini prikazivanja

Prekidačka ili Bulove funkcija f, je takva funkcija kojom se vrši preslikavanje $0,1^n$ 0,1. Drugim riječima, prekidačke funkcije su funkcije od n varijabli $f(x_1,...,x_n)$, gdje su $x_1,...,x_n$0,1, a tako|e i vrijednosti $f(x_1,...,x_n)$0,1.

U računarskoj tehnici prekidačke funkcije igraju vrlo značajnu ulogu, jer predstavljaju osnovu za analizu i sintezu svih računarskih komponenti.

Bulove funkcije se mogu prikazivati na više načina: tabelarno, pomoću skupova indeksa ili pomoću formula. Sada ćemo na primjerima prikazati navedene oblike predtavljanja Bulovih funkcija.

4.1.1. Tabelarni prikaz

Na primjer, neka funkcija $f(x_1,x_2,x_3)$ može biti zadata tako što se svakoj kombinaciju vrijednosti varijabli x_1,x_2,x_3 pridruži vrijednost funkcije, kako je to prikazano u Tabeli 1.1.

Tablela 1.1

i	x_1 x_2 x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0 0 0	0
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	b
4	1 0 0	1
5	1 0 1	0
6	1 1 0	0
7	1 1 1	b

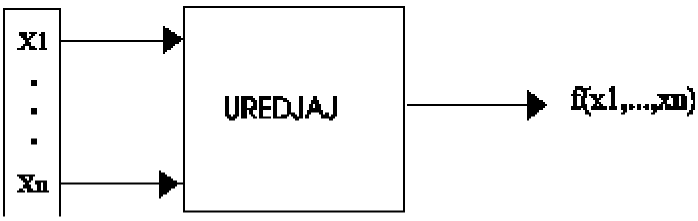
Za funkciju od n varijabli potrebno je 2^n redova tabele za njeno potpuno definisanje. Broj različitih funkcija od n varijabli je 2^{2^n}.

4.1.2 Prikaz formulom

4.1.3 Prikaz indeksom

Ponekad su vrijednosti funkcije, za neku kombinaciju vrijednosti varijabli, nedefinisane ili nebitne za ono što funkcija iskazuje. U takvim slučajevima ćemo umjesto 0 ili 1 za vrijednost funkcije pisati slovo "b" ("baš me briga"), imajući na umu da vrijednost slova b može biti 0 ili 1 kako nam je volja.

Zamislmo sada da smo na neki način uspjeli da napravimo uredjaj koja za svaku kombinaciju ulaznih varijabli $x_1,\ldots,x_n$, na izlazu daje vrijednost neke funkcije, Slikom 1.1.



Slika 1.1 Realizacija Bulovih funkcija

Za uredjaj sa Slike 1.1 kažemo da realizuje funkciju $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Za veći broj varijabli tabelarni prikaz postaje nepogodan, pa se često Bulove funkcije prikazuju i na drugi način - skupom indeksa i pomoću formula.

Skupovi indeksa su jednostavno skupovi rednih brojeva redova tabele (koje smo označavali slovom i) za koje funkcija ima vrijednost 0,1 ili b. Tako se funkcija data u Tabeli 1.1, mož prikazati skupovima indeksa:

f(0)=0,5,6, f(1)=1,2,4, f(b)=3,7.

4.2 Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF)

Ako sada iz tabele uzmemo one redove kod kojih je vrijednost funkcije 1 (to jest redove iz skupa f(1)), funkciju možemo prikazati u obliku formule:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

Formula je formirana u obliku zbira potpunih proizvoda tako što je za svaku varijablu uzet komplement kada u tabeli na mjestu varijable stoji vrijednost 0. Ovakva formula naziva se **savršenom disjunktivnom normalnom formom** (SDNF).

4.3 Savršena konjuktivna normalna forma (SKNF)

Slično, ako iz tabele uzmemo redove iz skupa f(0) dobijamo proizvod potpunih suma:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})\cdot(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})\cdot(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3),$$

gdje je sada komplementiranje varijabli izvršeno kod vrijednosti 1. Ovakva formula se naziva **savršenom konjuktivnom normalnom formom** (SKNF).

4.4 Minimalizacija Bulovih funkcija

Kako smo već rekli, Bulovim funkcijama se može prikazati rad svih računarskih komponenti, a isti pristup se koristi i pri njihovom projektovanju. Pri projektovanju računarskih komponenti, jedan od osnovnih kriterijuma jeste postizanje što većeg stepena minijaturizacije čime se, obično, postiže višestruka korist: manji fizički obim uredjaja, manja potrošnja energije, manja cijena uredjaja i sl. Pokazuje se da se ovi zahtjevi mogu ispuniti tako što se Bulove funkcije minimiziraju u skladu sa nekim zadatim kriterijumima.

Sada ćemo dati kriterijume minimizacije Bulovih funkcija koji se najčešće koriste.

Kriterijumi minimalizacije

Za Bulovu funkciju g kažemo da je **implikanta** funkcije f, ako na svim ulaznim vektorima na kojima f ima vrijednost 0 i g ima vrijednost 0.

Za Bulovu funkciju g kažemo da je **implicita** funkcije f, ako na svim ulaznim vektorima na kojima f ima vrijednost 1 i g ima vrijednost 0.

Svaki elmentrni proizvod u SDNF jeste implikatna funkcije koju SDNF predstavlja.

Slično, svaki elementarni zbir u SKNF je implicita funkcije.

Prosta implikanta (implicita) funkcije je elementarni proizvod (zbir) čiji ni jedan dio nije implikanta (implicita) funkcije.

Elemetarni proizvodi (sume) nazivaju se **članovima**. Član koji se sastoji od samo jednog slova zove se **degenerisani član**.

Sada možemo dati jednu definiciju minimalne DNF (KNF) forme.

Definicija: DNF (KNF) je minimalna ako je ispunjen jedan od sljedećih uslova:

1. Ne postoji alternativna DNF (KNF) sa manje degenerisanih članova, ili sa istim brojem nedegenerisanih članova ali sa manje slova u njima.

2. Ne postoji alternativna DNF (KNF) u kojoj je, zbir broja slova u nedegenerisanim članovima i broja članova, manji nego kod posmatrane KNF (DNF).

Razrađene su razne metode minimalizacije koje zadovoljavaju kriterijum 1 ili 2. Za manji broj promjenljivih pogodna je grafička metoda poznata kao Karnaug-ove karte. Za veći broj promjenljivih postoje računarski algoritmi koji vrše minimalizaciju.